272F

کد کنترل

272

F

آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری ـ سال ۱۴۰۱

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

دفترچهٔ شمارهٔ (۱)
صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

رشتهٔ آمار
(کد ۲۲۳۲)

جدول مواد امتحانی، تعداد، شمارهٔ سؤال‌ها و زمان پاسخ‌گویی

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ	زمان پاسخ‌گویی
مجموعه دروس تخصصی: ـ مبانی آنالیز ریاضی ـ ریاضی عمومی ۱و۲ ـ احتمال ۱و۲ ـ استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵	۱۵۰ دقیقه

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزلهٔ غیبت و حضور نداشتن در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب .... با شمارهٔ داوطلبی .... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ بازگشتی باشد به‌طوری‌که $x_0 = 1$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)x_{n-1}$. در این صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$:

۱) بی‌کران است و لذا واگرا است.
۲) نزولی و کراندار است و لذا همگرا است.
۳) کوشی نیست و لذا واگرا است.
۴) صعودی و کراندار است و لذا همگرا است.

۲- کدام گزینه دربارهٔ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$، درست است؟

۱) همگرای مطلق است.
۲) همگرای مشروط است.
۳) واگرا به بی‌نهایت است.
۴) دنبالهٔ مجموع جزئی آن کراندار است ولی سری واگرا است.

۳- فرض کنید A زیرمجموعه‌ای نامتناهی و سره از $\mathbb{R}$ باشد و A° و ∂A به‌ترتیب مجموعهٔ نقاط درونی و مرزی A باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر A° متناهی باشد، آنگاه $A^\circ = \varnothing$.
۲) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $A^\circ = \varnothing$.
۳) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $(\partial A)^\circ \neq \varnothing$.
۴) اگر A باز و در $\mathbb{R}$ چگال باشد، آنگاه ∂A متناهی است.

۴- فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به ازای هر $x , y \in \mathbb{R}$ در شرط $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند. کدام گزینه معادل پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ نیست؟

۱) f یکنوا است.
۲) f بر هر بازهٔ بسته و کراندار انتگرال‌پذیر ریمان است.
۳) $f|\mathbb{Q}^c$ (تحدید f به مجموعهٔ اعداد گنگ)، پیوسته است.
۴) $f|\mathbb{Q}$ (تحدید f به مجموعهٔ اعداد گویا)، پیوسته است.

۵- فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر f' بر (a,b) پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)$ موجود است.

۲) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ موجود باشد، آنگاه f' بر (a,b) کراندار است.

۳) اگر f' بر (a,b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)$ موجود است.

۴) اگر f بر (a,b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)$ موجود است.

۶- حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$، کدام است؟

۱) $\frac{27}{64}$

۲) $\frac{9}{64}$

۳) $\frac{27}{16}$

۴) $\frac{9}{16}$

۷- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{4^n(2n-1)!}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $-\frac{\pi}{2}$

۴) $-\frac{\pi}{4}$

۸- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}x^{n!}$، کدام است؟

۱) e

۲) $\frac{1}{e}$

۳) ∞

۴) ۱

۹- معادلات پارامتری زیر معرف کدام منحنی در صفحه است؟

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cosh t \\ y = 2\sinh t \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

۱) سهمی
۲) دو خط متقاطع
۳) بیضی
۴) یک شاخه از یک هذلولی

۱۰- مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x)dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}\cos 1$
۲) $\frac{\pi}{4}\sin 1$
۳) $\frac{\pi}{2}\cos 1$
۴) $\frac{\pi}{2}\sin 1$

۱۱- مینیمم مقدار تابع $f(x, y, z) = 2xyz + z^2$ بر سطح کره واحد به مرکز مبدأ، کدام است؟

۱) $-\frac{11}{27}$
۲) $-\frac{5}{27}$
۳) $-\frac{8}{27}$
۴) $\frac{1}{27}$

۱۲- حجم ناحیه محدود به رویه‌های $x^2 + y^2 + 3z = 4$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، کدام است؟

۱) π
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۳- اگر خم C حاصل از برخورد دو رویهٔ $S_1 : x^2 - y^2 - z^2 = \frac{1}{4}$, $S_2 : 4x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 3$ در نیم‌فضای $x > 0$ و در جهت راست‌گرد باشد و $F(x,y,z) = (x,-z,y)$ آن‌گاه $\oint_C F.dr$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) $\frac{\pi}{3}$

۳) π

۴) $\frac{3}{2}$

۱۴- در کیسه اول ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی و در کیسه دوم ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مهره آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، اگر احتمال اینکه هر دو مهره انتخابی همرنگ باشند به تقریب برابر ۰/۴۴ باشد، تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم چقدر است؟

۱) ۱۰

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۴

۱۵- شخصی یک تاس سالم را به‌صورت متوالی پرتاب می‌کند. اگر شماره روی تاس ۶ بالا بیاید، فوراً برنده می‌شود (و بازی متوقف می‌گردد) و اگر شماره روی تاس k بیاید، برای هر k بین ۱ تا ۵، k دقیقه صبر کرده و سپس دوباره تاس را پرتاب می‌کند. متوسط زمان سپری شده از زمان شروع به پرتاب تا برنده شدن، کدام است؟ (توجه: اگر شخص در اولین پرتاب برنده شود، زمان سپری شده را صفر در نظر بگیرید).

۱) ۱۵

۲) ۲۰

۳) ۲۵

۴) ۳۰

۱۶- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع کشی استاندارد با تابع توزیع $F(x)$ باشد، مقدار $E\left[\frac{F(X)}{1+F(X)}\right]$، کدام است؟

۱) $\ln(2)$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $1-\ln(2)$

۴) وجود ندارد.

۱۷- A و B به‌طور مستقل از هم سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنند. با فرض سالم بودن سکه، احتمال آنکه تعداد شیرها در پرتاب‌های آن‌ها یکسان باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$

۲) $\frac{11}{64}$

۳) $\frac{5}{16}$

۴) $\frac{7}{64}$

۱۸- اگر X یک متغیر تصادفی پواسون باشد، آنگاه مقدار $\frac{E[X(X-1)(X-2)(X-3)]}{E[X(X-1)]}$، کدام است؟

۱) $\frac{E[X^4]}{E[X^2]}$

۲) $E[X(X-1)]$

۳) $E\left[X^2\right]$

۴) $E[(X-2)(X-3)]$

۱۹- فرض متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت $[0,1]$ باشد، تابع چگالی احتمال $Y=\frac{X}{1+X}$، کدام است؟

۱) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\ln 2\,(1-y)} & 0\le y\le \frac{1}{2}\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

۲) $f_Y(y)=\begin{cases}2y(1-y) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

۳) $f_Y(y)=\begin{cases}3(1-y)^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

۴) $f_Y(y)=\begin{cases}(1-y)^{-2} & 0\le y\le \frac{1}{2}\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

۲۰- اگر Y روی فاصلهٔ $[-۱,۳]$ دارای توزیع یکنواخت باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $U = Y^۲$، کدام است؟

۱) $f(u) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۸\sqrt{u}} & ۰ \le u \le ۱ \\ \dfrac{۱}{۴\sqrt{u}} & ۱ < u \le ۹ \end{cases}$

۲) $f(u) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۴\sqrt{u}} & ۰ \le u \le ۱ \\ \dfrac{۱}{۸\sqrt{u}} & ۱ < u \le ۹ \end{cases}$

۳) $f(u) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۲} & ۰ \le u \le ۱ \\ \dfrac{۱}{۱۶} & ۱ < u \le ۹ \end{cases}$

۴) دارای توزیع یکنواخت روی $[۱,۹]$

۲۱- فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برابر $M_X(t) = \sum_{n=۰}^{\infty} \left(\dfrac{t}{۳}\right)^n$ باشد. مقدار واریانس X، کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$

۲) $\dfrac{۱}{۹}$

۳) $\dfrac{۱}{۲۷}$

۴) $\dfrac{۱}{۸۱}$

۲۲- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از $Bin\left(۳, \dfrac{۱}{۴}\right)$ باشند. مقدار $E(۳X - ۲Y \mid X + Y = ۲)$، کدام است؟

۱) ۱

۲) $\dfrac{۳}{۴}$

۳) $\dfrac{۱}{۲}$

۴) $\dfrac{۱}{۴}$

۲۳- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری‌که $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ است. تحت چه شرطی $L_1 = C_1X + C_2Y$ و $L_2 = C_3X + C_4Y$ مستقل هستند؟

۱) $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$

۲) $C_1C_2 + C_3C_4 = 0$

۳) $C_1C_4 + C_2C_3 = 0$

۴) $C_1C_3 + C_2C_4 = 0$

۲۴- فرض کنید X_1، X_2 و X_3 مستقل و به‌ترتیب دارای توزیع نمایی با میانگین‌های $\frac{1}{\lambda_1}$، $\frac{1}{\lambda_2}$ و $\frac{1}{\lambda_3}$ باشند. $P\left(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$

۲) $\frac{1}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}}$

۳) $\frac{e^{-\lambda_1}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}$

۴) $\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}}$

۲۵- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} p^2(1-p)^{x+y-2} & x, y = 1, 2, \ldots \;;\; 0 < p < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$P(Y = 2X)$، کدام است؟

۱) $\frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^3}$

۲) $\frac{p^2(1-p)}{(1-p)^2(1-p)^3}$

۳) $\frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$

۴) $\frac{p^2}{(1-p)^2(1-(1-p)^3)}$

۲۶- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0,1)$ باشد. اگر $L = \min(X_1, X_2, X_3)$ و $M = \max(X_1, X_2, X_3)$ باشد. آنگاه مقدار $P(M \le m, L \le \ell)$، کدام است؟ $(m \ge \ell)$

۱) $2m^3 - 3(m-\ell)^3$

۲) $2m^3 - 2(m-\ell)^3$

۳) $3m^3 - 2(m-\ell)^3$

۴) $m^3 - (m-\ell)^3$

۲۷- فرض کنید $\{X_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد به‌طوری‌که

$$P\left[X_n = -\frac{1}{n}\right] = P\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

اگر $F(x)$ توزیع حدی $\{X_n\}_{n\geq 1}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases}$

۲) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \end{cases}$

۳) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases}$

۴) توزیع حدی وجود ندارد.

۲۸- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ و $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از هم به‌ترتیب از توزیع‌های $N(\theta, 1)$ و $Bin(1, p)$ باشند. اگر قرار دهیم $Z_i = X_i Y_i$، در این‌صورت آماره بسنده مینیمال برای (θ, p)، کدام است؟

۱) $\left(\sum_{i=1}^{n} I(Z_i = 0) \ , \ \sum_{i=1}^{n} I(Z_i = 1)\right)$

۲) $\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} I(Z_i = 0)\right)$

۳) $\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\, I(Z_i = 1) \ , \ \sum_{i=1}^{n} Z_i\, I(Z_i = 0)\right)$

۴) $\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} I(Z_i = 1)\right)$

۲۹- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $-\infty < x \le \theta$ ، $f_\theta(x) = e^{x-\theta}$ باشد، $E(X_{(n)} S^2)$، کدام است؟ $\left(S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$

۱) $\theta - \frac{1}{n}$

۲) $\theta - \frac{1}{n+1}$

۳) $\theta + \frac{1}{n}$

۴) $\theta + \frac{1}{n+1}$

۳۰- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه $(\theta, \theta + |\theta|)$ باشد که در آن $\theta \neq 0$ است. برآورد گشتاوری θ، کدام است؟

۱) $\hat{\theta} = 2\bar{X} I(\bar{X} > 0) + \frac{3}{2}\bar{X} I(\bar{X} < 0)$

۲) $\hat{\theta} = 2\bar{X} I(\bar{X} > 0) + \frac{2}{3}\bar{X} I(\bar{X} < 0)$

۳) $\hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X} I(\bar{X} > 0) + 2\bar{X} I(\bar{X} < 0)$

۴) $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X} I(\bar{X} > 0) + 2\bar{X} I(\bar{X} < 0)$

۳۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $Bin\left(2, \frac{\theta}{1+\theta}\right)$ باشد که در آن $\theta > 0$ است. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ، کدام است؟

۱) $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

۲) $\frac{\bar{X}}{2-\bar{X}}$

۳) $\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$

۴) وجود ندارد.

۳۲- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی (مستقل و هم توزیع) از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{\theta - 1}{3}\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-\theta} \quad ; \quad x > 0 \ , \ \theta > 1$$

برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی برای پارامتر θ، کدام است؟

۱) $1 + \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right)}$

۲) $1 + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right)$

۳) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right)$

۴) $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right)}$

۳۳- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \ , \ \theta \in \{1, 2, 4\}$ است. با استفاده از یافته نمونه تصادفی $x_1 = 1, \ x_2 = 3$ برآورد ماکزیمم درست‌نمایی θ، کدام است؟

۱) $\hat{\theta} = a \ , \ a \in \{1, 4\}$

۲) $\hat{\theta} = a \ , \ a \in \{2, 4\}$

۳) $\hat{\theta} = a \ , \ a \in \{1, 2\}$

۴) $\hat{\theta} = a \ , \ a \in \{1, 2, 4\}$

۳۴- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, 1)$ که $\theta \in \mathbb{R}$ باشد، برآوردگر UMVUE برای $P(X_1 < 0)$، کدام است؟ (Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.)

۱) $\Phi\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\bar{x}\right)$

۲) $\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\bar{x}\right)$

۳) $\Phi\left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\bar{x}\right)$

۴) $\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\bar{x}\right)$

۳۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $G(x)=[F(x)]^{\theta}$ باشد که در آن $F(x)$ یک تابع توزیع پیوسته معلوم است و $\theta > 0$. UMVUE پارامتر θ^{-2} کدام است؟

۱) $\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i)\right]^2$

۲) $\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} (\ln F(X_i))^2$

۳) $\frac{1}{n(n+1)}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln F(X_i)\right]^2$

۴) $\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} (\ln F(X_i))^2$

۳۶- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع دوجمله‌ای $B(1, p)$ باشد و قرار دهید $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$. اگر $h_m(T)$، بهترین برآوردگر نااریب (UMVUE)، P^m باشد، در این‌صورت بهترین برآوردگر نااریب $P(X_1+X_2>X_3)$، کدام است؟

۱) $3h_1(T)-2h_2(T)+3h_3(T)$

۲) $2h_1(T)+3h_2(T)+2h_3(T)$

۳) $3h_1(T)+2h_2(T)+3h_3(T)$

۴) $2h_1(T)-3h_2(T)+2h_3(T)$

۳۷- فرض کنید $Y_1, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع از یک جامعه با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\theta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}} & y>0, \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

یک برآوردگر سازگار برحسب $\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ برای θ، کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\bar{Y}$

۲) $\sqrt{2\pi}\bar{Y}$

۳) $\frac{\pi\bar{Y}}{2}$

۴) $\sqrt{2\pi\bar{Y}}$

۳۸- فرض کنید $x_1 = ۰/۵$، $x_2 = ۱$، $x_3 = ۰/۲۵$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته $U(۰, \theta)$ و θ نیز دارای توزیع پیشین یکنواخت پیوسته $U(۰, ۲)$ است. تحت تابع زیان توان دوم خطای وزنی $L(\theta, a) = \left(\frac{a-\theta}{\theta}\right)^۲$، برآورد بیز پارامتر $\theta^۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$

۳) $\frac{۸}{۳}$

۴) $\frac{۳۲}{۱۵}$

۳۹- فرض کنید $X|\theta \sim N(\theta, ۱)$ و $\theta \sim N(۰, ۱)$. با در نظر گرفتن تابع زیان $L(\theta, \delta) = e^{\delta-\theta} - (\delta - \theta) - ۱$ برآوردگر بیز θ، کدام است؟

۱) $\frac{X}{۲} + \frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{X}{۲} + \frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{X}{۲} - \frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{X}{۲} - \frac{۱}{۲}$

۴۰- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با میانگین $\frac{\alpha}{\lambda}$ باشد که در آن α معلوم است. با انتخاب توزیع پیشین ناسرهٔ $\pi(\lambda) = \frac{۱}{\lambda}$; $\lambda > ۰$ و تحت زیان توان دوم خطا، برآوردگر بیزی تعمیم یافته برای پارامتر λ، کدام است؟

۱) $n\alpha \sum X_i$

۲) $\frac{n\alpha}{\sum X_i}$

۳) $\frac{\alpha(n-۱)}{\sum X_i}$

۴) $\alpha(n-۱)\sum X_i$

۴۱- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}; \quad x > 0 \ , \ \theta > 0$$

برآوردگر بیزی تعمیم‌یافتهٔ θ تحت تابع زیان $L(\theta, \delta) = (1 - \frac{\delta}{\theta})^2$ و نسبت به پیشین جفریز، کدام است؟

۱) $\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \sqrt{\sum X_i^2}$

۲) $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \sqrt{\sum X_i^2}$

۳) $\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \sum X_i^2$

۴) $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \sum X_i^2$

۴۲- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Bin(1, \theta)$ و کلاس برآوردگرهای θ به‌صورت $\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + a$ باشد. تحت تابع زیان توان دوم خطا $(\delta - \theta)^2$ برآوردگر مینیماکس برای θ در این کلاس، کدام است؟

۱) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n+1}$

۲) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}$

۳) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n}$

۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

۴۳- از میان برآوردگرهای D_1، D_2 و D_3 برای پارامتر $\theta \in [1, 2]$ که به‌ترتیب دارای توابع مخاطرهٔ $R_1(\theta) = a\theta - 1$، $R_2(\theta) = -\theta^2 + a\theta$ و $R_3(\theta) = \frac{a}{\theta+1}$ $(2 < a < 3)$ هستند، برآوردگرهای مینیماکس و مجاز به‌ترتیب کدامند؟

۱) D_1 , D_1

۲) D_3 , D_2

۳) D_3 , D_1

۴) D_1 , D_3

۴۴- مسئله تصمیم بدون داده با تابع زیان زیر را در نظر بگیرید.

θ \ A	a_1	a_2	a_3
θ_1	۰	۱۰	۴
θ_2	۸	۰	۳

عمل مینیماکس آمیخته کدام است؟

۱) $\left(\frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8}\right)$

۲) $\left(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, 0\right)$

۳) $\left(\frac{1}{9}, 0, \frac{8}{9}\right)$

۴) $\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, 0\right)$

۴۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $Bin(1, p)$ باشد. در برآورد پارامتر p فرض کنید تابع زیان را $\frac{(\delta - p)^2}{p(1-p)}$ در نظر بگیریم. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $\frac{n\bar{X}}{n+1}$ یک برآوردگر مجاز است.

۲) $\bar{X}$ یک برآوردگر مجاز است.

۳) $\frac{n+1}{n}\bar{X}$ یک برآوردگر مجاز است.

۴) $\frac{n-1}{n}\bar{X}$ یک برآوردگر مجاز است.